

Corrigé du Problème 1

1.1.a. $E_M = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2$

b. Pas de forces de frottement: l'énergie mécanique se conserve. En outre, pour l'élongation maximale la vitesse s'annule, donc:

$$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow l = l_0 + v_1\sqrt{\frac{m}{k}}$$

c. Comme pour la question précédente on obtient pour la longueur maximale: $l = l_0 + v_2\sqrt{\frac{m}{k}}$, d'où pour le cosinus de l'angle: $\cos\varphi = \frac{l_0}{l} = \frac{1}{1 + \frac{v_2^2}{l_0^2}\sqrt{\frac{m}{k}}}$

1.2.a. Il s'agit de la force centrifuge $\frac{mv_3^2}{l}$ et la force de rappel $-k(l - l_0)$. La condition d'équilibre donne $mv_3^2 = k(l - l_0)l$.

b. On a $l = (l_0 \pm \sqrt{l_0^2 - \frac{4mv_3^2}{k}})/2 > 0$. Si $v_3 = 0$ on doit avoir $l = l_0$, donc la solution acceptable est la solution avec "+".

c. On en déduit: $T = \frac{2\pi l}{v_3} = \frac{\pi}{v_3}(l_0 + \sqrt{l_0^2 - \frac{4mv_3^2}{k}})$.

1.3.a. Conservation de l'énergie:

$$mv^2 = m(v_r^2 + v_\theta^2) + k(l - l_0)^2$$

b. $L = mlv$ se conserve (force centrale), d'où la relation demandée.

c. On élimine tout d'abord la vitesse v_θ pour obtenir: $v^2 = v_r^2 + v^2\frac{l_0^2}{l^2} + \frac{k}{m}(l - l_0)^2$. L'élongation est maximale pour $v_r = 0$ d'où:

$$v^2(1 - \frac{l_0^2}{l^2}) = \frac{k}{m}(l_{max} - l_0)^2$$

Après simplifications on trouve: $l_{max} \approx l_0 + \frac{2mv^2}{k}$.

1.4.a. Connaissant les forces on a:

$$m\dot{v}_r = -k(l - l_0) + \frac{mv_\theta^2}{l}$$

b. L'équation demandée est: $\ddot{x} = -x\frac{k}{m} + \frac{v^2 l^2}{(l_0 + x)^3}$.

c. On obtient aisément l'équation:

$$\ddot{x} = -x(\frac{k}{m} + \frac{3v^2}{l_0^2}) + \frac{v^2}{l_0}$$

Les conditions initiales sont: $\dot{x} = 0$ et $x = 0$.

d. Il s'agit d'équation d'un *oscillateur harmonique* de pulsation $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{3v^2}{l_0^2}}$ et de position d'équilibre déplacée de $x_0 = \frac{v^2}{\Omega^2 l_0}$. La solution générale s'écrit: $x - x_0 = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$. Avec les

CI: $x = \frac{v^2}{\Omega^2 l_0}(1 - \cos \Omega t)$.

L'amplitude du mouvement est: $\Delta x = \frac{v^2}{\Omega^2 l_0}$, la période $T = 2\pi/\Omega$.

e. On doit avoir: $\Delta x \ll l_0$ càd: $\frac{v^2}{\Omega^2 l_0} \ll l_0$. C'est vraie pour des vitesses de module: $v \ll l_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$.

f. On a $T_{rad} = 2\pi/\Omega \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ et $T_{rot} \approx 2\pi l_0/v$. La condition sur les vitesses implique: $T_{rot} \gg T_{rad}$.

Corrigé du Problème 2

2.1. La fameuse relation d'Einstein donne: $\hbar\nu = A + \frac{mv^2}{2}$.

2.2.a. Le potentiel de l'électrode E_2 décroît comme 1/distance, d'où: $\varphi = V_g \frac{r}{L_2}$.

b. Principe de superposition $\Rightarrow \boxed{\varphi = V_g \frac{r}{L_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$.

c. Conservation d'énergie: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + e\varphi = \frac{1}{2}mv_1^2 + eV_g \frac{r}{L_2} + \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 r}$, d'où:

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v^2 - \frac{2}{m}[eV_g \frac{r}{L_2} + \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 r}]}}.$$

d. La charge de l'électrode E_1 provient des électrons qui y sont captés, donc $Q = Ne$ avec N : le nombre des électrons. Les électrons arrivent jusqu'à ce que leur vitesse s'annule, d'où, à partir du résultat précédent on obtient facilement:

$$\boxed{N_{max} = \frac{4\pi\epsilon_0 r}{e^2} (\frac{1}{2}mv_1^2 - eV_g \frac{r}{L_2})}.$$

2.3.a. $\boxed{V = Q_2/C}$.

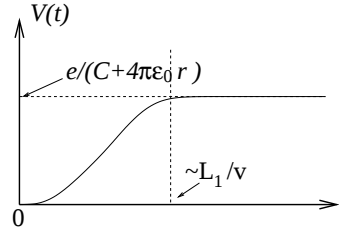
b. On a: $\boxed{V_g \frac{r}{L_2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q_2}{C}}$.

c. En utilisant $Q_1 + Q_2 = Q$ et le résultat de la question précédent on obtient:

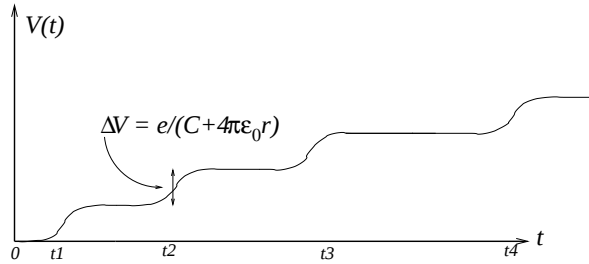
$$\boxed{V = (V_g \frac{r}{L_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}) \frac{1}{1+C/4\pi\epsilon_0 r}}.$$

Pour la valeur maximal de V l'expression dans les parenthèses est l'énergie cinétique initiale divisée par e , d'où, en utilisant 2.1. on obtient le résultat.

2.4.a. Lorsque l'électron arrive sur E_1 , le potentiel de l'électrode croît de $\Delta V = e \frac{1}{C+4\pi\epsilon_0 r}$, puis reste constante. En outre, l'électron arrive dans un temps $\sim L_1/v$ (pas tout à fait parcours libre car il y a aussi des effet d'induction électrique). D'où les variations de V :



b. L'effet du circuit électronique et de faire passer les électrons l'un après l'autre: en effet, elle déclenche la source chaque fois que $V(t)$ commence un palier. Mais chaque électron supplémentaire augmente la charge négative de la balle, et la répulsion électrostatique prolonge le temps de parcours de la distance L_1 pour l'électron suivant. D'où la graphique de $V(t)$ "en escalier", le dernier pas étant d'une durée infinie...



c. Le métal contient un grand nombre des électrons libres. Même un seul électron provoque une modification locale de la densité électronique (induction électrostatique, au cause de la répulsion avec les autres électrons), et en théorie l'intégrale de la densité électronique sur une sub-domaine est plus petit que la charge d'un seul électron.